PART2　円と直線の位置関係

例題

(1)　円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=-x+1$ の共有点の座標を求めよ。

(2)　円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=x+k$ について，次の問いに答えよ。

(i)　円と直線が異なる２点で交わるとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

(ii)　円と直線が接するとき，定数 k の値を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　円 $x^2+y^2=2$ と直線 $2x-y+3=0$ の共有点の座標を求めよ。

(2)　円 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$ と直線 $y=x+m$ について，次の問いに答えよ。

(i)　円と直線が接するとき，定数 m の値を求めよ。

(ii)　円と直線が共有点をもたないとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

第 6 講　PART2 確認問題

1 円 $x^2+y^2=5$ と直線 $3x-y-1=0$ の共有点の座標を求めよ。

$$\left(\boxed{ア},\ \boxed{イ}\right),\ \left(-\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}},\ -\frac{\boxed{オカ}}{\boxed{キ}}\right)$$

2 円 $(x-3)^2+(y+1)^2=4$ と直線 $y=x+k$ が異なる 2 点で交わるとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

$$\boxed{クケ}-\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}<k<\boxed{クケ}+\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}$$

3 円 $(x+1)^2+(y-2)^2=20$ と直線 $y=-2x+k$ が接するとき，定数 k の値を求めよ。

$$k=\boxed{シス},\ \boxed{セソタ}$$

PART2　円と直線の位置関係

例題

(1)　円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=-x+1$ の共有点の座標を求めよ。

(2)　円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=x+k$ について，次の問いに答えよ。

(i)　円と直線が異なる 2 点で交わるとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

(ii)　円と直線が接するとき，定数 k の値を求めよ。

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots\cdots① \\ y=-x+1 & \cdots\cdots② \end{cases}$

②を①に代入して　$x^2+(-x+1)^2=5$　　$x^2-x-2=0$　　$(x+1)(x-2)=0$

よって，$x=-1,\ 2$

②より　$x=-1$ のとき $y=2$，　$x=2$ のとき $y=-1$

したがって，共有点の座標は $(-1,\ 2)$，$(2,\ -1)$

(2) [判別式を用いる方法]

$\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots\cdots① \\ y=x+k & \cdots\cdots② \end{cases}$

②を①に代入して整理すると　$2x^2+2kx+k^2-1=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-1)=-k^2+2$$

(i)　円と直線が異なる 2 点で交わるのは $D>0$ のときであるから

$-k^2+2>0$　　$k^2<2$　　よって　$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

(ii)　円と直線が接するのは $D=0$ のときであるから

$-k^2+2=0$　　$k^2=2$　　よって　$k=\pm\sqrt{2}$

[点と直線の距離を用いる方法]

円 $x^2+y^2=1$ の中心は点 $(0,\ 0)$，半径は $r=1$

円の中心 $(0,\ 0)$ と直線 $y=x+k$，つまり $x-y+k=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

（i）円と直線が異なる2点で交わるのは $d<r$ のときであるから

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}}<1 \qquad |k|<\sqrt{2} \qquad \text{よって} \quad -\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$$

（ii）円と直線が接するのは $d=r$ のときであるから

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}}=1 \qquad |k|=\sqrt{2} \qquad \text{よって} \quad k=\pm\sqrt{2}$$

練習

(1) 円 $x^2+y^2=2$ と直線 $2x-y+3=0$ の共有点の座標を求めよ。

(2) 円 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$ と直線 $y=x+m$ について，次の問いに答えよ。

（i）円と直線が接するとき，定数 m の値を求めよ。

（ii）円と直線が共有点をもたないとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=2 & \cdots\cdots① \\ 2x-y+3=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$

②より $y=2x+3$　　これを①に代入して

$$x^2+(2x+3)^2=2 \qquad 5x^2+12x+7=0 \qquad (x+1)(5x+7)=0$$

よって，$x=-1,\ -\dfrac{7}{5}$

②より　$x=-1$ のとき $y=1$，　$x=-\dfrac{7}{5}$ のとき $y=\dfrac{1}{5}$

したがって，共有点の座標は $(-1,\ 1)$，$\left(-\dfrac{7}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$

(2) [判別式を用いる方法]

$\begin{cases} (x+2)^2+(y-1)^2=5 & \cdots\cdots① \\ y=x+m & \cdots\cdots② \end{cases}$

②を①に代入して整理すると　$2x^2+2(m+1)x+m^2-2m=0$

この2次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(m+1)^2-2(m^2-2m)=-m^2+6m+1$$

(i)　円と直線が接するのは $D=0$ のときであるから

$-m^2+6m+1=0$　　$m^2-6m-1=0$　　よって　$m=3\pm\sqrt{10}$

(ii)　円と直線が共有点をもたないのは $D<0$ のときであるから

$-m^2+6m+1<0$　　$m^2-6m-1>0$　　よって　$m<3-\sqrt{10}$，$3+\sqrt{10}<m$

[点と直線の距離を用いる方法]

円 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$ の中心は点 $(-2,\ 1)$，半径は $r=\sqrt{5}$

円の中心 $(-2,\ 1)$ と直線 $y=x+m$ つまり，$x-y+m=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|-2-1+m|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|m-3|}{\sqrt{2}}$$

(i)　円と直線が接するのは $d=r$ のときであるから

$\dfrac{|m-3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{5}$　　$|m-3|=\sqrt{10}$　　$m-3=\pm\sqrt{10}$

よって，$m=3\pm\sqrt{10}$

(ii)　円と直線が共有点をもたないのは $d>r$ のときであるから

$\dfrac{|m-3|}{\sqrt{2}}>\sqrt{5}$　　$|m-3|>\sqrt{10}$　　$m-3<-\sqrt{10}$，$\sqrt{10}<m-3$

よって，$m<3-\sqrt{10}$，$3+\sqrt{10}<m$

第６講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：2，ウ：2，エ：5，オカ：11，
キ：5

[解説]

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots\cdots① \\ 3x-y-1=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$ [A]

[A]　円と直線の共有点の座標は，円の方程式と直線の方程式を連立させた連立方程式の実数解として得られる。

②より　$y=3x-1$

これを①に代入して

$$x^2+(3x-1)^2=5$$

$$10x^2-6x-4=0$$

$$5x^2-3x-2=0$$

$$(x-1)(5x+2)=0$$

よって　$x=1,\ -\dfrac{2}{5}$

②より

$x=1$ のとき $y=2$

$x=-\dfrac{2}{5}$ のとき $y=-\dfrac{11}{5}$

したがって，共有点の座標は

$$\mathbf{(1,\ 2),\ \left(-\frac{2}{5},\ -\frac{11}{5}\right)}$$

2 **[正解]** クケ：-4，コ：2，サ：2

[解説]

（判別式を用いる方法）　[B]

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y+1)^2=4 & \cdots\cdots ① \\ y=x+k & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

②を①に代入して

$$(x-3)^2+(x+k+1)^2=4$$

$$2x^2+2(k-2)x+k^2+2k+6=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(k-2)^2-2(k^2+2k+6)$$

$$=-k^2-8k-8$$

円と直線が異なる 2 点で交わるのは $D>0$ のときであるから

$$-k^2-8k-8>0$$

$$k^2+8k+8<0$$

よって　$\boldsymbol{-4-2\sqrt{2}<k<-4+2\sqrt{2}}$

（点と直線の距離を用いる方法）　[B]

円 $(x-3)^2+(y+1)^2=4$ の中心は点 $(3,\ -1)$，

半径は $r=2$

円の中心 $(3,\ -1)$ と直線 $y=x+k$　つまり，

$x-y+k=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|3-(-1)+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k+4|}{\sqrt{2}}$$

円と直線が異なる 2 点で交わるのは $d<r$ のときであるから

$$\frac{|k+4|}{\sqrt{2}}<2$$

$$|k+4|<2\sqrt{2}$$

$$-2\sqrt{2}<k+4<2\sqrt{2}$$

よって　$\boldsymbol{-4-2\sqrt{2}<k<-4+2\sqrt{2}}$

[B]　円と直線の位置関係

・判別式を用いる方法

円の方程式と直線の方程式から，1 つの文字を消去して得られる 2 次方程式の判別式 D の符号を調べる。

・点と直線の距離を用いる方法

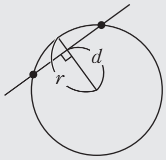
円の中心と直線との距離 d と円の半径 r の大小関係を調べる。

① $D>0 \Longleftrightarrow d<r$
$\Longleftrightarrow$ 異なる 2 点で交わる

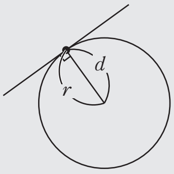
② $D=0 \Longleftrightarrow d=r$
$\Longleftrightarrow$ 接する

③ $D<0 \Longleftrightarrow d>r$
$\Longleftrightarrow$ 共有点をもたない

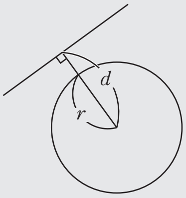
①



②



③



3 [正解] シス：10，セソタ：−10

[解説]

(判別式を用いる方法)　[C]

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y-2)^2=20 & \cdots\cdots ① \\ y=-2x+k & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

②を①に代入して

$$(x+1)^2+(-2x+k-2)^2=20$$

$$5x^2+2(5-2k)x+k^2-4k-15=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(5-2k)^2-5\left(k^2-4k-15\right)$$

$$=-k^2+100$$

円と直線が接するのは $D=0$ のときであるから

$$-k^2+100=0$$

$$k^2=100$$

よって　$\boldsymbol{k=\pm 10}$

(点と直線の距離を用いる方法)　[C]

円 $(x+1)^2+(y-2)^2=20$ の中心は点 $(-1,\ 2)$,

半径は $r=2\sqrt{5}$

円の中心 $(-1,\ 2)$ と直線 $y=-2x+k$　つまり，

$2x+y-k=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|2\cdot(-1)+2-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

円と直線が接するのは $d=r$ のときであるから

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}\qquad |k|=10$$

よって　$\boldsymbol{k=\pm 10}$

[C]　円と直線の位置関係

・判別式を用いる方法

円の方程式と直線の方程式から，1 つの文字を消去して得られる 2 次方程式の判別式 D の符号を調べる。

・点と直線の距離を用いる方法

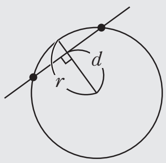
円の中心と直線との距離 d と円の半径 r の大小関係を調べる。

① $D>0 \iff d<r$
$\iff$ 異なる 2 点で交わる

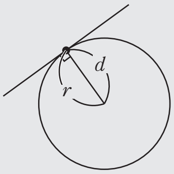
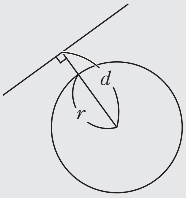
② $D=0 \iff d=r$
$\iff$ 接する

③ $D<0 \iff d>r$
$\iff$ 共有点をもたない

①



②



③